Equations aux dimensions- Incertitudes

I) Equations aux dimensions

1-Grandeurs fondamentales et grandeurs dérivées

La grandeur physique est une propriété décrivant un phénomène physique. Les grandeurs physiques sont reliées entre elles par des relations appelées lois physiques. Pour cela les physiciens ont adopté des grandeurs fondamentales indépendantes et qui sont : la longueur (L), la masse (M), le temps (T) et l'intensité du courant électrique (I). Les grandeurs dérivées peuvent être exprimées en fonction des grandeurs fondamentales, exemple le volume est exprimée en fonction de la longueur, la vitesse est exprimée en fonction de la longueur et du temps.

Géométrie: on a qu'une seule grandeur fondamentale qui est la longueur (L) et tous les autres grandeurs dérivées (volume, surface) sont exprimées en fonction de la longueur (L).

Cinématique: deux grandeurs fondamentales sont considérées : la longueur (L) et le temps (T).

Mécanique: trois grandeurs fondamentales sont considérées : la longueur (L),le temps (T) et la masse (M).

Electricité: En plus de ces grandeurs évoquées précédemment, on a une quatrième grandeur fondamentale qui est l'intensité du courant électrique (I).

2- Unités

La mesure est une opération technique qui nous permet d'attribuer un nombre quelconque à une propriété physique en le comparant à une quantité prise comme référence et de même nature choisie comme unité. Donc à toute grandeur correspond une unité et une norme pour définir cette unité. Pour les grandeurs fondamentales correspondent des unités fondamentales et pour les grandeurs dérivées correspondent des unités dérivées.
Il existe plusieurs systèmes d'unités, le plus utilisé est le système MKSA (Egalement CGS).

Le tableau suivant résume les grandeurs fondamentales et leurs unités dans le système MKSA.

Grandeur fondamentale	Représentation	Unité	Représentation
Longueur Masse Temps Intensité du courant électrique	L M T I	Mètre Kilogramme Seconde Ampère	M Kg S A
Intensité optique	$\mathfrak{I}$	Candéla	Cd
Chaleur dynamique	θ	Degré Kelvin	°K

Unités dérivées dans le système MKSA: Les grandeurs physiques sont liées entre elles par des lois physiques, donc à partir des grandeurs fondamentales et leurs unités fondamentales, nous pouvons connaitre les unités de toutes les grandeurs dérivées, un exemple est donné dans le tableau suivant:

Grandeur dérivée	représentation	Loi physique	Unités dérivées	
			Nom	Représentation
Force	F	F = ma	Newton	N
Energie	E	W= Fd	Joule	J
Puissance	P	P = W/t	Watt	W
capacité	C	C = Q/V	Farad	F
Résistance	R	R = U/I	Ohm	Ω

3-Equations aux dimensions

Nous exprimons les grandeurs dérivées en fonction des grandeurs fondamentales comme suit : Toute grandeur X s'écrit en fonction des grandeurs fondamentales comme suit :

$[X] = M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}I^{\delta}$

Cette expression est appelée équation aux dimensions de la grandeur X.

Exemples:

Vitesse: $v = \frac{x}{t}$, $[v] = \frac{[x]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1}$

Accélération: $a = \frac{v}{t}$, $[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$

Force: $F = ma$, $[F] = [m][a] = MLT^{-2}$

Pression: $p = \frac{F}{S}$, $[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$

Quantité de mouvement: P =mv, $[p] = [m][v] = MLT^{-1}$

Quelques grandeurs n'ont pas de dimensions, exemple: indice de réfraction $n = \frac{c}{v}$ où c est la vitesse de la lumière ; $[n] = 1$. Une constante numérique n'a pas de dimension π=3.14, $[\pi] = 1$

4- Homogénéité des dimensions

Les lois physiques sont homogènes par rapport aux dimensions ; c'est-à-dire les deux membres de l'équation physique ont la même dimension, ceci nous emmène à retrouver l'équation qui décrit un phénomène physique (Loi physique). Exemple, nous savons que la période d'un pendule simple est fonction de sa longueur et de l'accélération de la pesanteur $T = f(l, g)$

$$T = kl^x g^y$$

$$[T] = [k][l]^x [g]^y = L^x (LT^{-2})^y = L^{x+y}T^{-2y} = T \Rightarrow x + y = 0 \text{ et } -2y = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \text{ et } x = \frac{1}{2}$$

$$T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$$

5- Passage du système MKSA au système CGS

Pour passer du système MKSA au système CGS, nous utilisons l'équation de dimensions, exemple:

L'unité de la force dans le système MKSA est le Newton, par contre dans le système CGS son unité est le dyne.

$1N = ?dyne$

$[F] = MLT^{-2}$

$1USI = 10^3.10^2.1UCGS$

$1N = 10^5 dyne$

Le travail : $[W] = MLT^{-2}$

$1USI = 10^3.10^4.1UCGS$

$1J = 10^7 erg$

II Incertitudes

1 Calcul de l'incertitude sur une mesure de manière directe

Quand un opérateur effectue plusieurs mesures de la même grandeur A, il obtient plusieurs valeurs légèrement différentes_$a_1, a_2, a_3 ....a_n$, la valeur la plus proche de la réalité est selon la théorie des probabilités la valeur moyenne:

$$a_{moy} = \frac{a_1 + a_2 + ...a_n}{n} = \frac{\sum_1^n a_i}{n}$$

On calcule l'incertitude absolue sur la valeur i (mesure a_i) par:

$$\Delta a_i = |a_i - a_{moy}|$$

L'incertitude absolue moyenne s'écrit :

$\Delta a_{moy} == \frac{\sum_1^n \Delta a_i}{n}$, on écrit le résultat comme suit:

$a = a_{moy} \pm \Delta a_{moy}$, la valeur de a est comprise entre les valeurs $a_{moy} - \Delta a_{moy}$ et $a_{moy} + \Delta a_{moy}$.

Pour définir la précision de la mesure, nous utilisons l'incertitude relative :

$\delta = \frac{\Delta a_{moy}}{a_{moy}}$, elle est souvent donnée en %.

2- Calcul de l'incertitude sur une mesure indirecte

L'incertitude commise sur une mesure directe influe sur la mesure indirecte d'un grandeur physique, exemple pour mesurer la différence de potentiel aux bornes d'une résistance (U = RI), on commet des erreurs dans les mesures de R et I, et par conséquent on obtient une incertitude dans le calcul de U.

Il existe deux méthodes pour calculer l'incertitude sur la mesure indirecte: méthode de la différentielle d'une fonction et la méthode de la différentielle du logarithme d'une fonction.

Pour calculer l'incertitude relative à partir de la différentielle d'une fonction, on suit les étapes suivantes :

1- Calculer la différentielle d'une fonction
2- On divise par la fonction

3- On rassemble les termes semblables puis on passe au calcul de l'incertitude relative. Exemple :

$$f = x^2 y^3 z^{-2}$$

$$df = 2xy^3 z^{-2} dx + 3x^2 y^2 z^{-2} dy - 2x^2 y^3 z^{-3} dz$$

$$\frac{df}{f} = \frac{2xy^3 z^{-2}}{x^2 y^3 z^{-2}} dx + \frac{3x^2 y^2 z^{-2}}{x^2 y^3 z^{-2}} dy - \frac{2x^2 y^3 z^{-3}}{x^2 y^3 z^{-2}} dz$$

$$\frac{df}{f} = \frac{2}{x} dx + \frac{3}{y} dy - \frac{2}{z} dz$$

$$\frac{\Delta f}{f} = 2\frac{\Delta x}{x} + 3\frac{\Delta y}{y} + 2\frac{\Delta z}{z}$$

Pour calculer l'incertitude relative à partir de la différentielle du logarithme d'une fonction, on suit les étapes suivantes :

1- Calculer le logarithme de la fonction

2 Calculer la différentielle du logarithme de fonction

On rassemble les termes semblables puis on passe au calcul de l'incertitude relative.

$$f = x^2 y^3 z^{-2}$$

$$\log f = 2\log x + 3\log y - 2\log z$$

$$\frac{df}{f} = 2\frac{dx}{x} + 3\frac{dy}{y} - 2\frac{dz}{z}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = 2\frac{\Delta x}{x} + 3\frac{\Delta y}{y} + 2\frac{\Delta z}{z}$$